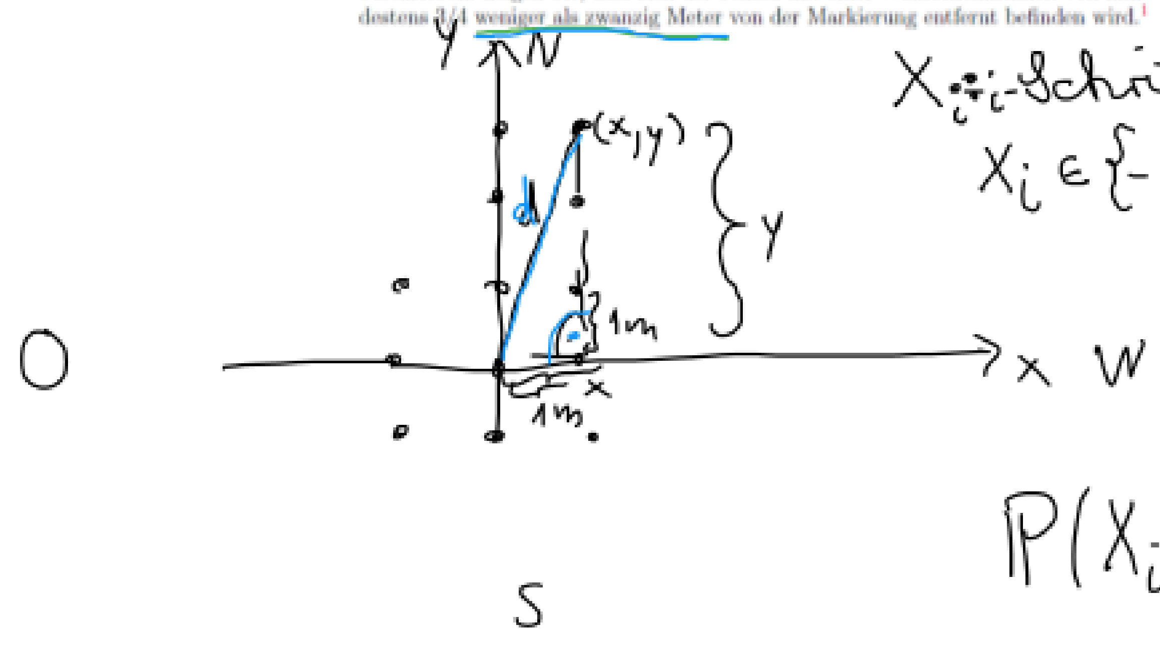
Aufgabe 2 [10 Punkte]

Der Pirat Rotbart möchte seinen Schatz auf einer kleinen Insel vergraben. Um die genaue Stelle, an der der Schatz vergraben wird, festzulegen, geht er wie folgt vor: Ausgehend von einer zuvor angefertigten Markierung macht er insgesamt 100 große Schritte, von denen jeder eine Distanz von einem Meter überbrückt. Vor jedem einzelnen Schritt wählt er zufällig und unabhängig von den vorherigen Schritten aus, ob dieser nach Norden, Süden, Osten oder Westen gehen soll. Ein einzelner Schritt wird also durch eine Gleichverteilung auf einer vierelementigen Menge $\{N, O, S, W\}$ beschrieben. Zeigen Sie, dass sich der Schatz mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 3/4 weniger als zwanzig Meter von der Markierung entfernt befinden wird.[1]



X_i: i-Schritt in x Richtg

$X_i \in \{-1, 1, 0\}$

$Y_i :=$ i-ter Schritt in y-Richtg

$Y_i \in \{-1, 1, 0\}$

$P(X_i = 1) = \frac{1}{4} = P(X_i = -1)$

$P(X_i = 0) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$E[X_i] = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$E[Y_i] = 0$

$E\left[\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right|\right] \leq$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$Var(X_i) = E[X_i^2] - \underbrace{E[X_i]^2}_{=0}$

$= E[X_i^2] = 1 \cdot P(X_i^2 = 1) + 0 \cdot P(X_i^2 = 0)$

$= P(X_i^2 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$d = \sqrt{x^2 + y^2} < 20$

$d^2 = x^2 + y^2 < 400$

$P(d < 20) =$

$= P(X^2 + Y^2 < 400)$

$= P\left(\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right)^2 < 400\right) \overset{!}{\geq} \frac{3}{4}$

$\geq P\left(\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)^2 < 200 \wedge \left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right)^2 < 200\right)$

Tschebyscheff:

$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

Satz [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Es seien (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable, a eine reelle Konstante und ferner $h\colon D \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion gegeben. Die Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ von h enthalte außerdem die Bildmenge von X.

Die allgemeine Markow-Ungleichung besagt dann:

$$h(a) P[X \geq a] \leq \mathrm{E}[h(X)],$$

was man für $h(a) > 0$ zu

$$P[X \geq a] \leq \frac{\mathrm{E}[h(X)]}{h(a)}$$

umschreiben kann.

$P(A \cap B) =$

$= 1 - P((A \cap B)^c)$

$= 1 - P(A^c \cup B^c)$

$= 1 - P\left(\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)^2 \geq 200 \vee \left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right)^2 \geq 200\right)$

$\geq 1 - \left(P\left(\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)^2 \geq 200\right) + P\left(\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right)^2 \geq 200\right)\right)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\leq P(A) + P(B)$

$= 1 - \left(P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| \geq \sqrt{200}\right) + P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} Y_i\right| \geq \sqrt{200}\right)\right)$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\geq 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Markov-Ungleichung

Markov:

$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|]}{a}$

Tschebyscheff

$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

$\boxed{\begin{array}{l} X, Y \text{ unabhängig} \\ Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \end{array}}$

$P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| \geq \sqrt{200}\right) =$

$= P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i - \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right]}_{= \sum_{i=1}^{100} \underbrace{E[X_i]}_{=0} = 0}\right| \geq \sqrt{200}\right) \leq \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)}{200} = \frac{\sum_{i=1}^{100} Var(X_i)}{200} = \frac{100 \cdot \frac{1}{2}}{200} = \frac{1}{4}$