Aufgabe 3 [10 Punkte]

Es seien $N, R, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n, R \le N$. Ferner seien $p \in (0,1)$ sowie $\lambda > 0$ reelle Zahlen. Bestimmen Sie die Erwartungswerte der folgenden Verteilungen:

(i) Hypergeometrische Verteilung zu den Parametern N, R, n.

(ii) Geometrische Verteilung zum Parameter p.

(iii) Poisson-Verteilung zum Parameter λ.

---

i) N Anzahl aller Kugeln
R " roter "
n Zahl der Züge
$X :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$n = 3$
$R = 4$

$X \in \{\max\{0, R+n-N\}, \dots, \min\{n, R\}\}$

Sei $k \in \{$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{R}{k}\cdot\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$0 \le k \le R$

$0 \le n-k \le N-R \quad | -n$
$-n \le -k \le N-R-n \quad | \cdot(-1)$
$n \ge k \ge R+n-N$

$\max\{0, R+n-N\} \le k \le \min\{n, R\}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=\max\{0,R+n-N\}}^{\min\{n,R\}} k \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

ii) $X \sim Geo(p)$
$X \in \mathbb{N}$

$k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} =$$

$$= (-1) \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^k = (-1) \cdot p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

$$= (-1) \cdot p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} = (-1) \cdot p \cdot \frac{d}{dp} (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k =$$

$$= (-1) \cdot p \cdot \frac{d}{dp} (1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)} =$$

$$= (-1)\, p\, \frac{d}{dp} \frac{1-p}{p} = (-1) \cdot p \frac{d}{dp}\Big(\underbrace{\frac{1}{p}}_{=p^{-1}} - 1\Big)$$

$$= (-1) \cdot p \cdot (-1) \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$X \sim Geom(p)$
$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$

$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

$\frac{d}{dp}(p^k) = k \cdot p^{k-1}$

$\frac{d}{dp}((1-p)^k) = k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot \frac{d}{dp}(1-p) = k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot (-1)$

Kettenregel

$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Beispiel $(\exp(x^2))' = \exp'(x^2) \cdot (x^2)'$
$= \exp(x^2) \cdot 2 \cdot x$

$(x^1)' = 1 \cdot x^0$
$= 1 \cdot 1 = 1$

$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

$(-x)' = -(x)' = -1$

$(a + f(x))' = f'(x)$

$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

(iii) $X \sim Poi(\lambda)$
$X \in \mathbb{N}_0$

Sei $k \in \mathbb{N}_0 \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \lambda^k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lambda^k$$

$$\overset{\text{Indexshift}}{=} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \lambda^{k+1} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

$$\sum_{k=5}^{10} a_k = \sum_{k=0}^{5} a_{k+5} = \sum_{k=100}^{105} a_{k+95}$$