Aufgabe 3: Pumping Lemma (10 Punkte)

(a) **Wortmindestlänge** (2 Punkte)

Betrachten Sie die reguläre Sprache $A := \mathcal{L}(b^+a^*)$. Geben Sie die *minimale* Wortmindestlänge $n(A)$ an, sodass eine Zerlegung gemäß dem Pumping Lemma existiert.

(b) **Anwendung** (8 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas, dass

$$L := \{a^ib^ja^k \mid i \bmod 3 = 1, (j+k) \bmod 3 = 0, i+k \leq j\}$$

nicht regulär ist.

$ab^6a^3 \in$

$i = 1$ $\quad 1 \bmod 3 = 1$ ✓

$j = 6$ $\quad (j+k) \bmod 3 = 9 \bmod 3 = 0$ ✓

$k = 3$ $\quad i+k = 4 \leq 6 = j$ ✓

Zu zeigen: L erfüllt nicht reguläre Pumping-Eigenschaft, d.h.

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\quad \exists z \in L$ mit $|z| \geq n$ sodass

$\forall$ Zerlegungen $z = uvw$ mit • $|uv| \leq n$ und

• $|v| \geq 1$

$\exists i \in \mathbb{N}_0 : uv^iw \notin L$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $z := a^{3n+1}b^{3n+5}a^1 \in L$ ✓

$L := \{a^ib^ja^k \mid i \bmod 3 = 1, (j+k) \bmod 3 = 0, i+k \leq j\}$

$i = 3n+1$

$i \bmod 3 = 1$ ✓

$j = 3n+5$ $\quad (j+k) \bmod 3 = (3n+6) \bmod 3 =$

$k = 1$ $\quad = 3\cdot(n+2) \bmod 3 = 0$ ✓

$i+k = 3n+2 \leq 3n+5 = j$

$|z| = 3n+3n+7 = 6n+7 \geq n$ ✓

Sei $z = a^{3n+1}b^{3n+5}a = uvw$ eine Zerlegung mit $|uv| \leq n$

$\underbrace{a^n}_{uv}a^{2n+1}$ und $|v| \geq 1$.

Da $|uv| \leq n$ und z mit $(3n+1)$ a's beginnt, so besteht uv nur aus a's.

$\Rightarrow$ Auch v besteht nur aus a's

Wähle $i := 100$

$uv^{100}w = a^{\overbrace{3n+1+99\cdot|v|}^{i}}b^{\overbrace{3n+5}^{j}}a^{\overbrace{1}^{k}} \notin L$

$i+k = 3n+1+99\cdot|v|+1$

$= 3n+2+99\cdot\underbrace{|v|}_{\geq 1} \geq 3n+101 > 3n+5 = j$

$\Rightarrow L$ nicht regulär

miro

$$21 = 16 + 4 + 1 = 1\cdot 4^2 + 1\cdot 4^1 + 1\cdot 4^0 = (111)_4$$

$$40 = 2\cdot 16 + 2\cdot 4 = 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4^1 + 0\cdot 4^0 = (220)_4$$

$$(110110)_2 =$$

$$= 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 =$$

$$= \underbrace{(1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)}_{=3}\cdot 2^4 + \underbrace{(0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)}_{=1}\cdot 2^2 + 2\cdot 4^0$$

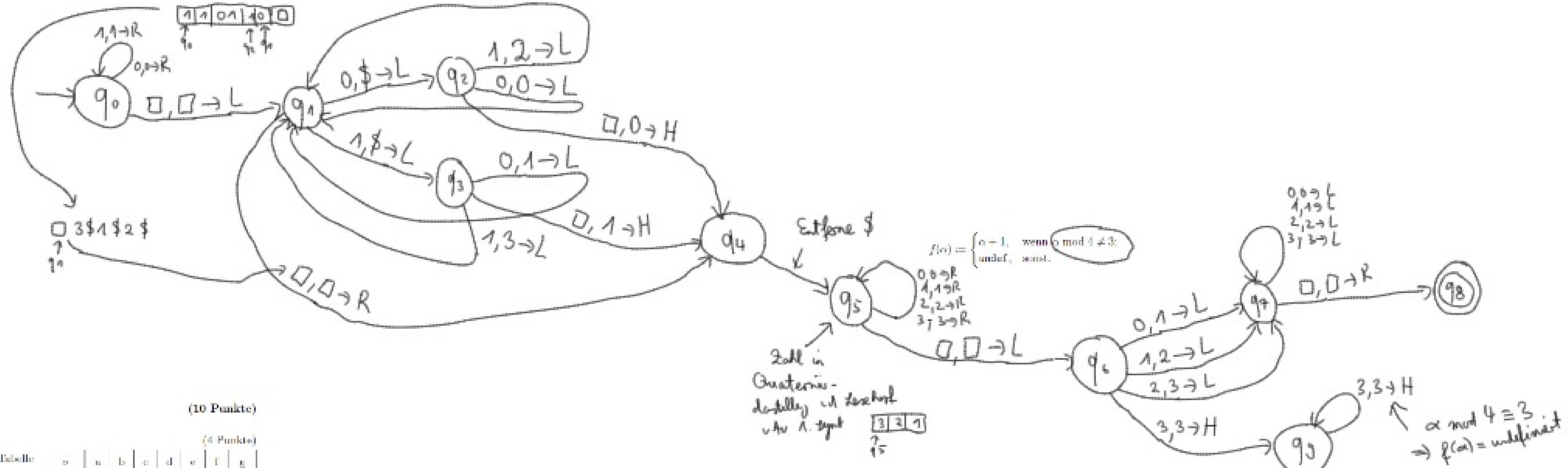
$$= 3\cdot (2^2)^2 + 1\cdot 2^2 + 2\cdot 4^0$$

$$= 3\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4^0$$

$$= (312)_4$$

$$(11011000011010)_2 =$$

$$= (1230122)_4$$



$$(3123)_4 =$$

$$= \underbrace{3\cdot 4^3 + 1\cdot 4^2 + 2\cdot 4^1}_{= 4\cdot(3\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 2)} + 3 \equiv 3 \mod 4$$

$$(1201)_4 \equiv 1 \mod 4$$

$$(13022)_4 \equiv 2 \mod 4$$

Aufgabe 1: Informationstheorie (10 Punkte)

(a) Erwartete Codewortlänge (4 Punkte)

Betrachten Sie die nebenstehende Tabelle für die Quelle (Σ, p).

Ist der gegebene Code C über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ ein Präfixcode minimaler erwarteter Codewortlänge? Begründen Sie.

σ	a	b	c	d	e	f	g
p_σ	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$
$C(\sigma)$	00	01	20	22	21	10	11

(b) Erwarteter Informationsgewinn (6 Punkte)

Sei $\varphi: \Sigma^* \to \{d, e, f, g\}^*$ eine *Filterfunktion*, welche die Zeichen a, b und c durch e ersetzt und die übrigen Zeichen unverändert lässt. Sei m eine Nachricht, deren Zeichen jeweils unabhängig aus der oben angegebenen Quelle (Σ, p) stammen.

Bestimmen Sie den erwarteten Informationsgewinn der Nachricht $\varphi(m)$ in Abhängigkeit von $k = |\varphi(m)|$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis, bis es keine log Terme mehr enthält.

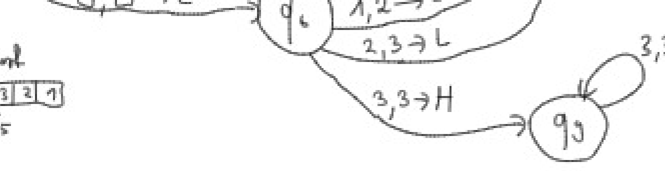
$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$P(\cdot) = 3 \qquad P(\cdot) = 1$$

miro

Zahl in Quaternärdarstellung mit Lesekopf unter 1. Symbol

3	2	1



$\alpha \bmod 4 \equiv 3$

$\Rightarrow f(\alpha) = \text{undefiniert}$

$$(3\ 1\ 2\ 3)_4 =$$

$$= \underbrace{3 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1}_{= 4 \cdot (3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2)} + 3 \equiv 3 \mod 4$$

$$(1\,2\,0\,1)_4 \equiv 1 \mod 4$$

$$(1\,3\,0\,2\,2)_4 \equiv 2 \mod 4$$

Aufgabe 1: Informationstheorie (10 Punkte)

(a) Erwartete Codewortlänge (4 Punkte)

Betrachten Sie die nebenstehende Tabelle für die Quelle (Σ, p).

σ	a	b	c	d	e	f	g
p_σ	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$
$C(\sigma)$	00	01	20	22	21	10	11

Ist der gegebene Code C über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ ein Präfixcode minimaler erwarteter Codewortlänge? Begründen Sie.

(b) Erwarteter Informationsgewinn (6 Punkte)

Sei $\varphi\colon \Sigma^* \to \{d, e, f, g\}^*$ eine *Filterfunktion*, welche die Zeichen a, b und c durch ε ersetzt und die übrigen Zeichen unverändert lässt. Sei m eine Nachricht, deren Zeichen jeweils unabhängig aus der oben angegebenen Quelle (Σ, p) stammen.

Bestimmen Sie den erwarteten Informationsgewinn der Nachricht $\varphi(m)$ in Abhängigkeit von $k := |\varphi(m)|$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis, bis es keine log-Terme mehr enthält.

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$\mathbb{P}(a) = \frac{3}{18}, \ldots, \mathbb{P}(g) = \frac{1}{18}$$

$$A := \{d, e, f, g\} \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(d) + \ldots + \mathbb{P}(g) = \frac{1}{18} + \frac{4}{18} + \ldots$$

$$= \frac{8}{18}$$

Bedingte W'keit

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Bedingung

$$\mathbb{P}_A(d) = \frac{\mathbb{P}(d)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{\cancel{18}}}{\frac{8}{\cancel{18}}} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}_A(e) = \frac{\mathbb{P}(e)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{8}{18}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_A(f) = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{8}{18}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}_A(g) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{8}{18}} = \frac{1}{8}$$

$\mathbf{H}_{\Sigma,p}(n) = n \cdot \mathbf{H}_{\Sigma,p}$

$$H_{\{d,e,f,g\},\mathbb{P}_A}(k) = k \cdot H_{\{d,e,f,g\},\mathbb{P}_A} =$$

$$= k \cdot (-1) \cdot \left(\mathbb{P}_A(d) \cdot \log_2 \mathbb{P}_A(d) + \ldots + \mathbb{P}_A(g) \cdot \log_2 \mathbb{P}_A(g)\right)$$

Entropie $\mathbf{H}_{\Sigma,p}$ = Erwarteter Inf'gewinn durch ein Symbol

$$\mathbf{H}_{\Sigma,p} = \mathbb{E}[I] = \sum_{\sigma \in \Sigma} p_\sigma \cdot I(p_\sigma) = -\sum_{\sigma \in \Sigma} p_\sigma \log_2 p_\sigma$$

$$= k \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \underbrace{\log_2\left(\frac{1}{8}\right)}_{=-3} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}_{=-1} + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\log_2\left(\frac{1}{4}\right)}_{=-2} + \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\log_2\left(\frac{1}{8}\right)}_{=-3}\right)$$

$$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^3}\right) = \log_2\left(2^{-3}\right) = -3$$

$$\log_2(2^x) = x$$

miro