Aufgabe 14

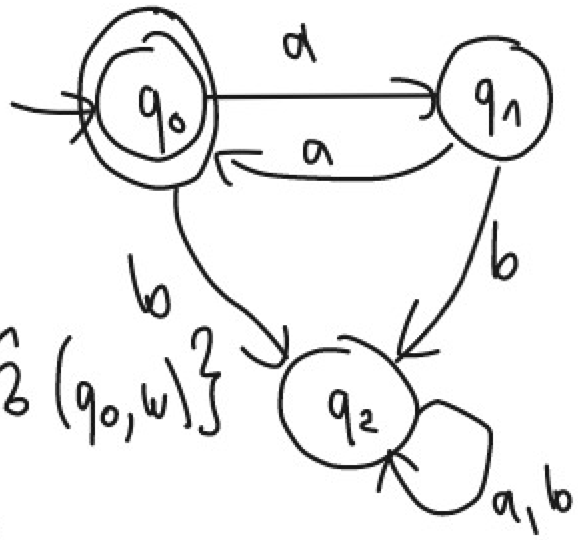
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat.
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cup L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.

L Sprache

$$v \approx_L w \;:\Leftrightarrow\; \forall z \in \Sigma^* : vz \in L \Leftrightarrow wz \in L$$

$\Sigma = \{a, b\}$ $\quad L = \{a^n \mid n \text{ gerade}\}$



$[a] = \{w \in \Sigma^* \mid a \approx_L w\}$

gilt nur wenn es der Minimale Automat ist $\rightarrow$ $= \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, a) = \hat{\delta}(q_0, w)\}$

$= \{a^n \mid n \text{ ungerade}\} =$

$= L(a(aa)^*)$

$|[a]| = \infty$

$U = \{1 + 2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

$\uparrow$ ungerade Zahlen

$[\varepsilon] = \{w \in \Sigma^* \mid \varepsilon \approx_L w\}$

$= \{a^n \mid n \text{ gerade}\} = L((aa)^*)$ $\quad |[\varepsilon]| = \infty$

$[b] = \{w \in \Sigma^* \mid b \approx_L w\} = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } b\}$

$= L(a^* b (a|b)^*)$

$|[b]| = \infty$

$[a] \cup [b] \cup [\varepsilon] = \Sigma^*$

Aufgabe 14

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat.
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cup L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.

1) $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| = p$ für eine Primzahl $\}$

abb $\not\approx_L$ abbbb, da

da abbaaaa $\in L$ und abbbbaaaa $\notin L$

$|[abb]| = |\{w \in \Sigma^* \mid |w| = 3\}| = 2^3 + 1 < \infty$

$|[abbb]| = |\{w \in \Sigma^* \mid |w| = 4\}| = 2^4 + 1 < \infty$

— — —

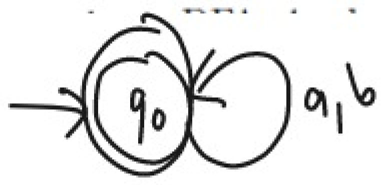
$|[\varepsilon]| = 1 = |\{\varepsilon\}|$

$\forall i \in \mathbb{N}_0: \quad [a^i] = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = i\}$ und $|[a^i]| = 2^i + 1 < \infty$

und $\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [a^i]$

2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.

$L_1 = \Sigma^*$



$[\varepsilon] = \Sigma^*$ $\quad \left| \Sigma^* / \approx_L \right| = 1$

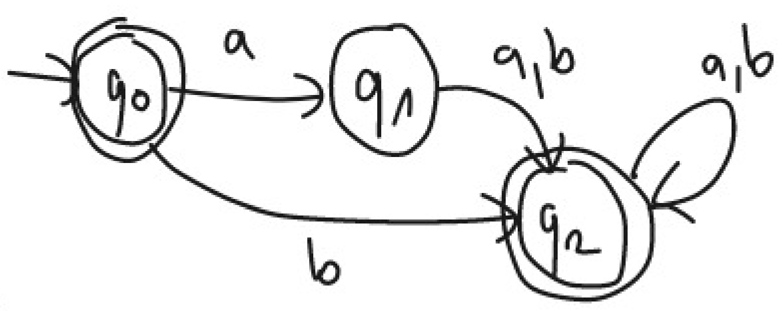
$L_2 = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$

$[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$

$[a] = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$

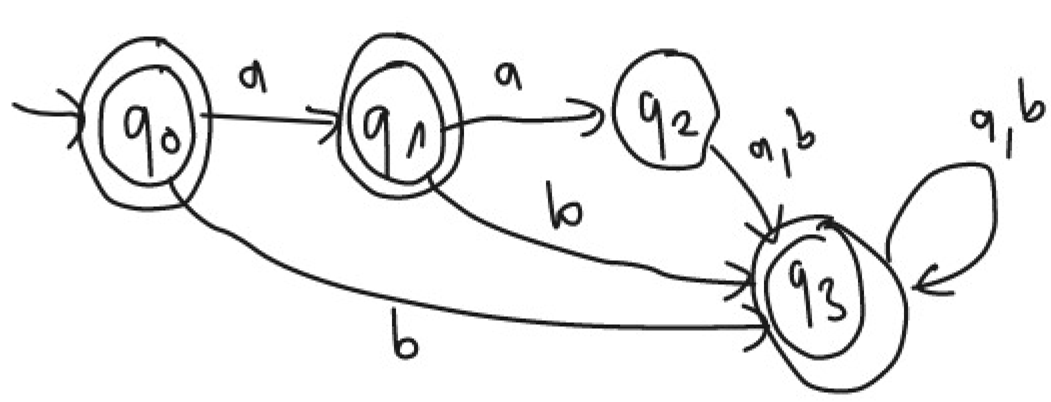
$\left| \Sigma^* / \approx_L \right| = 2$

$L_3 = \Sigma^* \setminus \{a\}$



$\left| \Sigma / \approx_L \right| = 3$

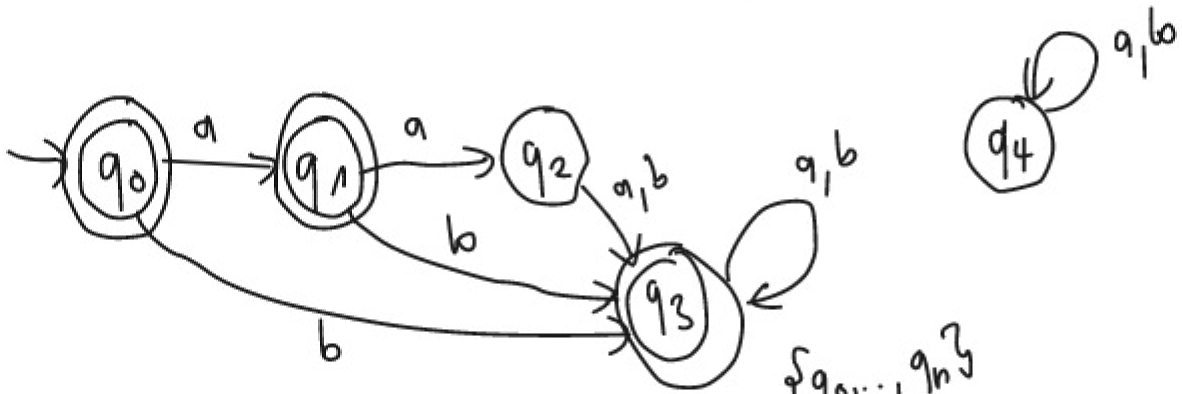
$L_4 = \Sigma^* \setminus \{aa\}$



$L_5 = \Sigma^* \setminus \{aaa\}$

$L_n := \Sigma^* \setminus \{a^{n-2}\}$

3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cup L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.



Beweis: Sei $A = (\overset{\{q_0, \ldots, q_n\}}{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$

Wir haben unendlich viele andere Automaten $A^{(i)} = (Q^{(i)}, \Sigma, \delta^{(i)}, s, F)$ mit $L(A) = L(A^{(i)})$

wobei $Q^{(i)} = Q \cup \{x_0, x_1, \ldots, x_i\}$

und $\delta^{(i)}: Q^{(i)} \times \Sigma \to Q^{(i)}$

$$(q, a) \mapsto \begin{cases} \delta(q, a) & \text{falls } q \in Q \\ x_j & \text{falls } q = x_j \text{ für ein } j \in \{0, \ldots, i\} \end{cases}$$

$$\delta: Q \times \Sigma \to Q$$

4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.

Gegenbeispiel:

$L = \Sigma^*$ $\qquad L' = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

wird von DFA erkannt $\qquad$ nicht

wird in D [illegible]
erkannt

5. Ist $L \cup L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i\in\mathbb{N}} L_i$ auch regulär.

5.) Gegenbeispiel:

$L = \{\varepsilon\} \leftarrow$ regulär

$L' = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \leftarrow$ nicht regulär

$L \cup L' = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \leftarrow$ nicht regulär

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1, L_2 \text{ regulär} \\ L_1 \cap L_2 \text{ regulär} \end{array}}$$

6.) Gegenbeispiel:

Sei $\mathcal{P}$ = Menge der Primzahlen

$\mathcal{P}$ ist abzählbar, d.h. $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

d.h. $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7, \ldots$

d.h. p_i = i-te Primzahl

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1, L_2, L_3 \text{ regulär} \\ \Rightarrow L_1 \cap L_2 \cap L_3 \text{ regulär} \end{array}}$$

$L_1 = \Sigma^* \setminus \{a^{p_1}\}$

$L_2 = \Sigma^* \setminus \{a^{p_2}\}$ $L_i = \Sigma^* \setminus \{a^{p_i}\}$

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} L_i = \Sigma^* \setminus \{a^{p_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$
$$= \Sigma^* \setminus \{a^p \mid p \in \mathcal{P}\}$$

$\uparrow$ nicht regulär

Wäre es regulär, dann wäre auch

$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} L_i\right)^c = \{a^p \mid p \in \mathcal{P}\}$ regulär, aber

das ist nicht regulär wie

man mit Pumping-Lemma zeigt!