hd (1 4 7 9 ...) = 1
tl (1 4 7 9 ...)
= (4 7 9 ...)

Aufgabe 4 – Korekursion und Koinduktion [9 Punkte]

1)

5) currentSample (sampler t s) = if (currentSample t) > 0 then currentSample s
else 0

6) discardSample (sampler t s) = sampler (discardSample t) (discardSample s)

2)

Satz (Koinduktion):
$R \subseteq$ Signal × Signal
$\forall (t,s) \in R$:
• currentSample t = currentSample s
• (discardSample t, discardSample s) $\in R$
$\Rightarrow R \subseteq id$

Sei R = { (sampler (square 0 1) (square x 0), flat 0) | $x \in \mathbb{Z}$ } ∪ { (sampler (square 1 0) (square 0 x), flat 0) | $x \in \mathbb{Z}$ }

currentSample (flat 0) $\overset{1}{=}$ 0
currentSample (sampler (square 0 1) (square x 0)) $\overset{5}{=}$
if (currentSample (square 0 1)) > 0 then currentSample (square x 0)
else 0
$\overset{3}{=}$ if 0 > 0 then .... else 0
= if false then .. else 0 = 0 ✓

discardSample (flat 0) $\overset{2}{=}$ flat 0
discardSample (sampler (square 0 1) (square x 0)) $\overset{6}{=}$
sampler (discardSample (square 0 1)) (discardSample (square x 0))
$\overset{4}{=}$ sampler (square 1 0) (square 0 x) =
(sampler (square 1 0) (square 0 x), flat 0) $\in R$ ✓

currentSample (flat 0) = 0
currentSample (sampler (square ~~0 1~~ 1 0) (square ~~x 0~~ 0 x)) $\overset{5}{=}$
if (currentSample (square ~~0 1~~ 1 0)) > 0 then currentSample (square ~~x 0~~ 0 x)
else 0
$\overset{3}{=}$ if ~~0~~ 1 > 0 then 0 else 0
= if ~~false~~ true then 0 else 0 = 0 ✓

discardSample (flat 0) $\overset{2}{=}$ flat 0
discardSample (sampler (square ~~0 1~~ 1 0) (square ~~x 0~~ 0 x)) $\overset{6}{=}$
sampler (discardSample (square ~~0 1~~ 1 0)) (discardSample (square ~~x 0~~ 0 x))
$\overset{4}{=}$ sampler (square ~~1 0~~ 0 1) (square ~~0 x~~ x 0) =
(sampler (square ~~1 0~~ 0 1) (square ~~0 x~~ x 0), flat 0) $\in R$ ✓

$\underset{\text{Satz (Koinduktion)}}{\Rightarrow}$ $R \subseteq id$

miro

ndition)

Sei $R = \{ (\text{sampler}\ (\text{square}\ 1\ 0)\ (\text{flat}\ x),\ \text{square}\ x\ 0) \mid x \in \mathbb{Z} \} \cup \{ (\text{sample}\ (\text{square}\ 0\ 1)\ (\text{flat}\ x),\ \text{square}\ 0\ x) \mid x \in \mathbb{Z} \}$

$\text{currentSample}\ (\text{square}\ x\ 0) \overset{3)}{=} x$

$\text{currentSample}\ (\text{sampler}\ (\text{square}\ 1\ 0)\ (\text{flat}\ x)) \overset{5)}{=} \text{if}\ (\text{currentSample}\ (\text{square}\ 1\ 0)) > 0\ \text{then}\ \text{currentSample}\ (\text{flat}\ x)\ \text{else}\ 0$

$\overset{3,1)}{=} \text{if}\ 1 > 0\ \text{then}\ x\ \text{else}\ 0$

$= \text{if}\ \text{true}\ \text{then}\ x\ \text{else}\ 0 = x$ ✓

$\text{discardSample}\ (\text{square}\ x\ 0) = \text{square}\ 0\ x$

$\text{discardSample}\ (\text{sampler}\ (\text{square}\ 1\ 0)\ (\text{flat}\ x)) = \text{sample}\ (\text{discardSample}\ (\text{square}\ 1\ 0))\ (\text{discardSample}\ (\text{flat}\ x))$

$= \text{sample}\ (\text{square}\ 0\ 1)\ (\text{flat}\ x)$

$\text{currentSample}\ (\text{square}\ \cancel{x\ 0}\ 0\ x) = \cancel{x}\ 0$

$\text{currentSample}\ (\text{sampler}\ (\text{square}\ \cancel{1\ 0}\ 0\ 1)\ (\text{flat}\ x)) \overset{5)}{=} \text{if}\ (\text{currentSample}\ (\text{square}\ \cancel{1\ 0}\ 0\ 1)) > 0\ \text{then}\ \text{currentSample}\ (\text{flat}\ x)\ \text{else}\ 0$

$\overset{3,1)}{=} \text{if}\ \cancel{1}\ 0 > 0\ \text{then}\ x\ \text{else}\ 0$

$= \text{if}\ \cancel{\text{true}}\ \text{false}\ \text{then}\ x\ \text{else}\ 0 = \cancel{x}\ 0$ ✓

$\text{discardSample}\ (\text{square}\ \cancel{x\ 0}\ 0\ x) = \text{square}\ \cancel{0\ x}\ x\ 0$

$\text{discardSample}\ (\text{sampler}\ (\text{square}\ \cancel{1\ 0}\ 0\ 1)\ (\text{flat}\ x)) = \text{sample}\ (\text{discardSample}\ (\text{square}\ \cancel{1\ 0}\ 0\ 1))\ (\text{discardSample}\ (\text{flat}\ x))$

$= \text{sample}\ (\text{square}\ \cancel{0\ 1}\ 1\ 0)\ (\text{flat}\ x)$

$R \subseteq id$

$\Longrightarrow$ Satz (Bkondition)

Satz (Kon

Beispiel 2.45. Wir definieren ein TES $\to_0$ durch

$$(x \oplus y) \oplus z \to_0 x \oplus (y \oplus z) \tag{4}$$
$$x \oplus (y \oplus z) \to_0 y \oplus y \tag{5}$$

(Achtung: Das ist a priori nur für Zwecke der schwachen Normalisierung äquivalent zum System mit nur einer Ersetzungsregel $(x \oplus y) \oplus z \to_0 y \oplus y$; für Zwecke der starken Normalisierung ist zunächst nicht klar, dass durch den Zwischenschritt (4) keine Divergenzen entstehen.) Wir verwenden die durch $A = \mathbb{N}_{\geq 2}$ und

$$p_\oplus(x, y) = x^2 + xy$$

gegebene Polynomordnung. Für Reduktion (4) rechnen wir

$$\begin{aligned} p_{(x\oplus y)\oplus z} &= p_\oplus(p_\oplus(x,y), z) \\ &= p_\oplus(x^2 + xy, z) \\ &= (x^2+xy)^2 + (x^2+xy)z \\ &= x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + x^2z + xyz \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} p_{x\oplus(y\oplus z)} &= p_\oplus(x, p_\oplus(y,z)) \\ &= x^2 + x(y^2 + yz) \\ &= x^2 + xy^2 + xyz, \end{aligned}$$

so dass in der Tat $p_{(x\oplus y)\oplus z} >_A p_{x\oplus(y\oplus z)}$ (warum?). Ferner haben wir

$$p_{y\oplus y} = y^2 + yy = 2y^2,$$

so dass offenbar $p_{x\oplus(y\oplus z)} >_A p_{y\oplus y}$. Achtung: In diesem Fall brauchen wir, dass die eingesetzten Werte ≥ 2 sind, da sonst i.a. nicht $x^2 + xy^2 + xyz > 2y^2$.

Nach Korollar 2.44 ist $\to$ somit SN.

$$\begin{aligned} p_{x\Uparrow(y\Uparrow z)} &= \\ &= p_\Uparrow(x, p_\Uparrow(y,z)) = \\ &= p_\Uparrow(x, y^2 \cdot z) = \\ &= x^2 \cdot (y^2 \cdot z) = x^2y^2z \end{aligned}$$

Aufgabe 1 Konfluenz und Terminierung (9 Punkte)

Wir definieren ein Termersetzungssystem über der aus zwei binären Funktionssymbolen $\Uparrow$ und $\Downarrow$ (in Infixnotation geschrieben) bestehenden Signatur Σ durch

$$x \Uparrow (y \Uparrow z) \to_0 x \Uparrow (y \Downarrow y)$$
$$x \Downarrow (x \Downarrow y) \to_0 x \Downarrow y$$

1. Ist dieses System terminierend? Geben Sie einen Beweis mittels Polynomordnungen oder ein Gegenbeispiel an.
2. Ist das System konfluent? Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

$$p_\Uparrow(x,y) = x^2 \cdot y \qquad p_\Downarrow(x,y) = x + y$$

$$\begin{aligned} p_{x\Downarrow(x\Downarrow y)} &= p_\Downarrow(x, p_\Downarrow(x,y)) = \\ &= p_\Downarrow(x, x+y) = x + (x+y) = 2x + y \end{aligned}$$

$$p_{x\Downarrow y} = p_\Downarrow(x,y) = x + y <_A 2x + y$$

mit $A = \mathbb{N}_{\geq 3}$

$$p_{x\Uparrow(y\Downarrow y)} = p_\Uparrow(x, p_\Downarrow(y,y)) = p_\Uparrow(x, 2y) = x^2 \cdot 2y <_A x^2y^2z$$