

$$y = 1-x$$

$$\boxed{x}_{n=0}$$

$$\sum_{n=2}^N \binom{N}{n} n(n-1) x^{n-2} (1-x)^{N-n}$$

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \cdot \underbrace{n \cdot (n-1)}_{(n^2 - n)} x^n \cdot (1-x)^{N-n}$$

$$N = \frac{1}{x} \cdot \langle \rangle$$

$$\sum_{m=0}^N n^2 \binom{N}{m} \cdot x^m (1-x)^{N-m} - \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \cancel{x^m} (1-x)^{N-n}$$

mrc

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$   
 $P(X=1) = p$   
 $P(X=0) = 1-p$   
 $E[X] = p$   
 $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$   
 $= p - p^2$   
 $= p(1-p)$   
 $\langle X^2 \rangle = E[X^2] = \frac{v}{V}$   
 $= 1 \cdot \frac{v}{V} + 0^2 \left(1 - \frac{v}{V}\right) = \frac{v}{V}$   
 $\text{Nombre de particules dans } V$   
 $\Rightarrow k = \sum X_i$   
 $\langle k \rangle = N \cdot \frac{v}{V}$

$\text{Var}(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$

$\langle k^2 \rangle$

$\text{Var}(X_i) = \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right)$

$\text{Var}(k) = \text{Var}(\sum X_i) = N \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right)$

$\sigma_k = \sqrt{N \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right)}$

$N: 100 \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{\frac{100}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)}$

$= \sqrt{50 \cdot \frac{1}{2}}$ 
 $= 5$

$N: 10^{10} \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{10^{10} \cdot \frac{1}{4}}$ 
 $= \frac{10^5}{2} = 0,5 \cdot 10^5$

$\frac{100}{2^{10}} = 50$

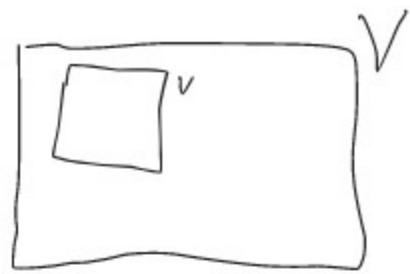
$\frac{100^{10}}{2} = 50^{10}$

$\sqrt{10^6} = 10^3$

$\sqrt{100^{50}} = 10^{25}$

$\frac{100}{2^{10}} = 50$

$\frac{100^{10}}{2} = 50^{10}$



$= p = \frac{v}{V} \times N$ 
 $\langle k \rangle = \frac{v}{V} \cdot N$

$\alpha T \text{ et } \langle k(k-1) \rangle = e^{-\alpha T} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{\alpha T}}{V} = (\alpha T)^2 e^{-\alpha T} = \frac{1}{2} \alpha T^2 (1-e^{-\alpha T})$ 
 $\langle k(k-1) \rangle + \langle k \rangle = \langle k \rangle^2 = \alpha T = \langle k \rangle$

## 2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de  $N$  molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume  $V$ . Soit  $k$  le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume  $v$  du récipient.

1 - Quelle est la valeur moyenne  $\langle k \rangle$  de  $k$ ?

2 - Quel est l'écart-type  $\sigma_k$  de  $k$ ?

Indice : on peut écrire la variable  $k$  comme une somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes.

Données :  $v = \frac{V}{N}$  et  $N = 100$ , puis  $N = 10^{10}$  et  $N = N_A$ .

3 - Faire l'application numérique

4 - Pour  $N$  très grand et  $\frac{v}{V}$  fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité  $P(k)$  de  $k$ ?

On veut calculer la probabilité exacte  $P(k)$  qu'il y ait  $k$  molécules dans le volume  $v$ .

6 - De combien de manières différentes peut-on choisir les  $k$  molécules parmi  $N$  qui sont dans le volume  $v$ ?

7 - Quelle est la probabilité de l'un de ces choix? (par exemple, pour  $k = 4$  et  $N = 100$ , quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume  $v$ ?)

8 - En déduire l'expression de  $P(k)$ . Quel est le nom de cette distribution de probabilité?

9 - On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n y^{N-n} \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité  $P(k)$  est bien normalisée.

10 - Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à  $x$ , puis remplacer  $y$  par  $1-x$  dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de  $k$ .

11 - On se place à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  tels que la densité  $\frac{v}{V}$  est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de  $k$  se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de  $\langle k \rangle$  (on posera  $k = \langle k \rangle + s$  avec  $s \ll N$ ). Ce résultat est-il surprenant?

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n y^{N-n} \quad (1)$$

$v = \frac{V}{2} \quad N = 100 \quad v = 10^{10} \quad N = N_A$

$N \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right) \geq 0$

$\frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^N$

$\alpha T \text{ et } \langle k(k-1) \rangle = e^{-\alpha T} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{\alpha T}}{V} = (\alpha T)^2 e^{-\alpha T} = \frac{1}{2} \alpha T^2 (1-e^{-\alpha T})$ 
 $\langle k(k-1) \rangle + \langle k \rangle = \langle k \rangle^2 = \alpha T = \langle k \rangle$

## 2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de  $N$  molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume  $V$ . Soit  $k$  le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume  $v$  du récipient.

1 - Quelle est la valeur moyenne  $\langle k \rangle$  de  $k$ ?

2 - Quel est l'écart-type  $\sigma_k$  de  $k$ ?

Indice : on peut écrire la variable  $k$  comme une somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes.

Données :  $v = \frac{V}{N}$  et  $N = 100$ , puis  $N = 10^{10}$  et  $N = N_A$ .

3 - Faire l'application numérique

4 - Pour  $N$  très grand et  $\frac{v}{V}$  fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité  $P(k)$  de  $k$ ?

5 - Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume  $v$ ?

On veut calculer la probabilité exacte  $P(k)$  qu'il y ait  $k$  molécules dans le volume  $v$ .

6 - De combien de manières différentes peut-on choisir les  $k$  molécules parmi  $N$  qui sont dans le volume  $v$ ?

7 - Quelle est la probabilité de l'un de ces choix? (par exemple, pour  $k = 4$  et  $N = 100$ , quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume  $v$ ?)

8 - En déduire l'expression de  $P(k)$ . Quel est le nom de cette distribution de probabilité?

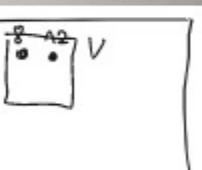
9 - On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n y^{N-n} \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité  $P(k)$  est bien normalisée.

10 - Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à  $x$ , puis remplacer  $y$  par  $1-x$  dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de  $k$ .

11 - On se place à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  tels que la densité  $\frac{v}{V}$  est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de  $k$  se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de  $\langle k \rangle$  (on posera  $k = \langle k \rangle + s$  avec  $s \ll N$ ). Ce résultat est-il surprenant?



$\sigma_k = \sqrt{\frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V} \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{V}\right)^4\right)^4}$ 
 $p = \left(\frac{v}{V}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{96}$

$8) P(k) = \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-k}$

Quelles  $k$  particules  
sont dans  $v^2$

$\therefore \text{montrer: } P(k) \geq 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, N\}$

$\text{et } P(k) \leq 1 \quad \sum_{k=0}^N P(k) = 1$

$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{v}{V}\right)^k \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-k} = \left(\frac{v}{V} + 1 - \frac{v}{V}\right)^N = 1$

$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \cdot x^k \cdot y^{N-k} = (x+y)^N$

## 4 Man

L'intégrale Gaus

Soit l'intégrale g

1 - Montrer que  $I_1(a)$

2 - Exprimer  $I_n(a)$  e

3 - On admet en sus

La fonction Ga

On définit la fo

4 - Calculer  $\Gamma(1)$  e

5 - Montrer que  $\Gamma($

## 1 Décroissar

On considère la désintegra

demi-vie de la source, le n

la probabilité que pendant

la durée  $T$  en  $N \gg 1$  il

donc 0 ou 1 désintégrati

$p \ll 1$  la probabilité qu'u

ne particule soit

des intégrations pendant

de  $\alpha$ ,  $N$  et  $T$ .

On peut également calcu

supposer  $N$  fini, et, si la t

2 - Quelle est probabilit

aucune pendant tous les

$\alpha T$  et  $\langle k(k-1) \rangle = \alpha^2 N \sum_{k=0}^N k(k-1) \frac{e^{-\alpha k}}{k!} = (\alpha x)^2 e^{-\alpha x} = \alpha^2 x^2 / (k+2)!$

 $\langle k(k-1) \rangle + \langle k \rangle - \langle k \rangle^2 = \alpha T = \langle k \rangle.$ 

## 2 ■■ Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de  $N$  molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume  $V$ . Soit  $k$  le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-vOLUME  $v$  du récipient.

- 1 - Quelle est la valeur moyenne  $\langle k \rangle$  de  $k$  ?
- 2 - Quel est l'écart-type  $\sigma_k$  de  $k$  ?

Indice : on peut écrire la variable  $k$  comme une somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes.

Données :  $v = \frac{V}{N}$  et  $N = 100$ , puis  $N = 10^{10}$  et  $N = N_A$ .

- 3 - Faire l'application numérique
- 4 - Pour  $N$  très grand et  $v$  fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité  $P(k)$  de  $k$  ?
- 5 - Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume  $v$  ?

On veut calculer la probabilité exacte  $P(k)$  qu'il y ait  $k$  molécules dans le volume  $v$ .

- 6 - De combien de manières différentes peut-on choisir les  $k$  molécules parmi  $N$  qui sont dans le volume  $v$  ?
- 7 - Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour  $k = 4$  et  $N = 100$ , quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume  $v$  ?)
- 8 - En déduire l'expression de  $P(k)$ . Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?
- 9 - On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité  $P(k)$  est bien normalisée.

- 10 - Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à  $x$ , puis remplacer  $y$  par  $1-x$  dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de  $k$ .
- 11 - On se place à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  tels que la densité  $\frac{N}{V}$  est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de  $k$  se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de  $\langle k \rangle$  (on posera  $k = \langle k \rangle + s$  avec  $s \ll N$ ). Ce résultat est-il surprenant ?

On veut maintenant calculer la distribution de probabilité  $N$  final, et, à la toute fin du calcul, on prendra  $N \rightarrow \infty$ .

Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration aucune pendant tous les autres intervalles ? En déduire pendant toute la durée  $T$ , sans qu'on précise à quel instant.

Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégrations dans l'intervalle  $71$  par exemple ? En déduire la probabilité que toutes les désintégrations se produisent dans toute la durée  $T$ , sans qu'on précise à quelles instants.

De même, déterminer la probabilité  $P(k)$  d'avoir  $k$  désintégrations dans l'intervalle  $T$ , sans qu'on précise les instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution est une loi de Poisson.

Prendre la limite  $N \rightarrow \infty$  (après avoir remplacé  $\bar{p}$  par  $p$ ) pour obtenir la distribution de probabilité  $P(k)$  en fonction de  $\alpha$  et de  $T$  (on rappelle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N-1} = e^{-\alpha}$ ).

Indice : en cas de doute, commencer par calculer la probabilité que  $N=0$ .

Comment s'appelle cette distribution de probabilités ?

Comment déterminer la valeur moyenne  $\langle k \rangle$  et la variance  $\text{Var}(k)$  ?

Indice : écrire  $k^2 = k(k-1) + k$ .

$$\begin{aligned} (x^{10})' &= 10x^9 \\ (x^n)' &= nx^{n-1} \quad x^0 = 1 \\ (100)' &= 0 \quad (x^0)' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{100} i^2 - \bar{i} = & \sum_{i=0}^{100} i^2 - \sum_{i=0}^{100} i \\ & = \frac{1}{X^2} \left[ \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \cdot X^m (1-X)^{N-m} - \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \cancel{X^n (1-X)^{N-n}} \right] \quad \text{1er dérivée: valeur moyenne} \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\pi^2 \cdot p(m)}_{\langle k^2 \rangle} \quad \underbrace{n \cdot p(n)}_{\langle k \rangle} \\ & \boxed{\sum_{i=0}^N x \cdot (i^2 - \bar{i}) \cdot y \cdot z = \sum i^2 \cdot x \cdot y \cdot z - \bar{i} \cdot x \cdot y \cdot z} \quad N(N-1) = \frac{1}{X^2} (\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle) \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum i^2 \cdot y \cdot z - \sum i \cdot x \cdot y \cdot z \\ & \langle k^2 \rangle = N(N-1) \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \langle k \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Var}(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

$$\begin{aligned}
 &= N(N-1) \cdot \frac{v^2}{V^2} + \langle k \rangle - \langle k \rangle^2 \\
 &= N^2 \cdot \frac{v^2}{V^2} - N \cdot \frac{v^2}{V^2} + \langle k \rangle - \langle k \rangle^2 \\
 &= \cancel{\langle k \rangle^2} - \frac{v^2}{V} \langle k \rangle + \cancel{\frac{N \cdot v}{V}} + \cancel{\langle k \rangle^2} \\
 &= \langle k \rangle \left( 1 - \frac{v}{V} \right) \\
 &= N \cdot \frac{v}{V} \left( 1 - \frac{v}{V} \right)
 \end{aligned}$$

$$\beta_k = \sqrt{\text{Var}(k)} = \sqrt{J}$$

$$\sigma_K = \sqrt{Var(K)} = \sqrt{0}$$

$$\alpha T \text{ et } \langle k(k-1) \rangle = e^{-\beta T} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \langle k \rangle^2 e^{-\beta k} = \langle k \rangle \langle k-1 \rangle = \langle k \rangle - \langle k \rangle^2$$

## 2. Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de  $N$  molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en volume dans un récipient de volume  $V$ . Soit  $k$  le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume  $v$  du récipient.

1. Quelle est la valeur moyenne  $\langle k \rangle$  de  $k$ ?
2. Quel est l'écart-type  $\sigma_k$  de  $k$ ?  
Indice : on peut écrire la variable  $k$  comme une somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes. Donc  $\sigma_k^2 = \frac{v}{V}$  et  $N = 100$ , puis  $N = 10^{23}$  et  $N = N_A$ .
3. Faire l'application analogique.
4. Pour  $N$  très grand et  $\frac{v}{V}$  fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité  $P(k)$  de  $k$ ?
5. Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume  $v$ ?  
On peut calculer la probabilité exacte  $P(k)$  qu'il y ait  $k$  molécules dans le volume  $v$ ?
6. De combien de manières différentes peut-on choisir les  $k$  molécules parmi  $N$  qui sont dans le volume  $v$ ?
7. Quelle est la probabilité de l'un de ces choix? (par exemple, pour  $k=4$  et  $N=100$ , quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 25 et 42, par exemple, soient dans le volume  $v$ ?)
8. En déduire l'expression de  $P(k)$ . Quel est le nom de cette distribution de probabilité?
9. On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité  $P(k)$  est bien normale.

10. Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à  $x$ , puis remplacer  $y$  par  $1-x$  dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de  $k$ .
11. On se place à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  tels que la densité  $\frac{N}{V}$  soit constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de  $k$  se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de  $\langle k \rangle$  (on posera  $k = \langle k \rangle + s$  avec  $s \ll N$ ). Ce résultat est-il surprenant?

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! (N-k)!} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \text{Si } s \ll 1 \\ & P(k = \langle k \rangle + s) \\ &= \binom{N}{\langle k \rangle + s} \cdot \left( \frac{A}{V} \right)^{\langle k \rangle + s} \left( 1 - \frac{v}{V} \right)^{N - \langle k \rangle - s} \end{aligned}$$

$$= \frac{N!}{(\langle k \rangle + s)! (N - \langle k \rangle - s)!} \cdot \frac{P(\langle k \rangle + s)}{\left( \frac{N}{V} + s \right)! \left( N - \frac{N}{V} - s \right)!} \cdot \left( \frac{v}{V} \right)^{\frac{N}{V} + s} \cdot \left( 1 - \frac{v}{V} \right)^{N - \frac{N}{V} + s}$$

$\downarrow N \rightarrow \infty$

miro

probabilité de déint. :  $p$

intervalles fixes

Janme intervalles:  $N-1$

$$3) P = p \cdot p^{N-1}$$

intervalles possibles

$$P = p^{(k=2)} \binom{N}{2} p^2 (1-p)^{N-2}$$

Dans quelles intervalles as-tu une déintégration?

$$4) P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Loi binomiale!

$$\sum_{k=0}^N P(k) = 1 \leftarrow \text{à vérifier}$$

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = (p+1-p)^N = 1^N = 1$$

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k} = (x+y)^N$$

Loi binom de Newton

### 1) Décroissance radioactive

On considère la décroissance d'une source radioactive. On observe que pendant une durée  $T$  exacte devant la demi-vie de la source, le nombre moyen de désintégrations est  $\langle k \rangle = \alpha T$ . Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que pendant un temps  $T$  il y ait  $k$  désintégrations. Pour modéliser la décroissance, on découpe la durée  $T$  en  $N \gg 1$  intervalles de taille constante  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . Pendant chacun des  $N$  intervalles  $\Delta t$ , il y a donc 0 ou 1 désintégration. On suppose que les événements sont indépendants d'un intervalle à l'autre. Soit  $p \ll 1$  la probabilité qu'une désintégration se produise pendant un intervalle  $\Delta t$ .

- 1 - Quel est le nombre moyen de désintégrations dans un intervalle  $\Delta t$  donné? Quel est le nombre moyen de désintégrations pendant la durée  $T$ ? En reliant l'introduction, en déduire une expression de  $p$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$  et  $T$ .

On vous demandent calculer la distribution de probabilité du nombre de désintégrations. On commence par supposer  $N$  fixé, et, à la toute fin du calcul, on prendra la limite  $N \rightarrow \infty$ .

- 2 - Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration pendant un intervalle  $\Delta t$  donné (par exemple le 17<sup>e</sup> et dernier pendant toute les autres intervalles)? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement une désintégration pendant toute la durée  $T$ , sans qu'on précise à quel instant elle a eu lieu.

- 3 - Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégrations pendant le temps  $T$ , l'une à l'intervalle 17 et l'autre à l'intervalle 71 par exemple? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement deux désintégrations pendant toute la durée  $T$ , sans qu'on précise à quelles instants elles ont eu lieu.

- 4 - De même, déterminer la probabilité  $P(k)$  d'avoir exactement  $k$  désintégrations pendant la durée  $T$  à des instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution de probabilité est normale.

- 5 - Prendre la limite  $N \rightarrow \infty$  (on rappelle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} [1 + \frac{a}{N}]^N = e^a$ ). Indice : en cas de doute, commencer par calculer la limite pour  $k = 1$  ou  $k = 2$ .

- 6 - Comment s'appelle cette distribution de probabilité? Vérifier qu'elle est bien normalisée. Calculer explicitement la valeur moyenne ( $\langle k \rangle$ ) et la variance  $\text{Var}(k)$ . Indice : écrire  $k^2 = k(k-1) + k$ .

$X_i = 1$  si y a une déintégration dans ième intervalle

$X_i = 0$  sinon  $P(X_i = 0) = 1-p$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$\langle X_i \rangle = \mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = p$$

$k = \sum X_i \sim \text{Binom}(N, p)$

$k \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$\langle k \rangle = \langle \sum_{i=1}^N X_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^N \langle X_i \rangle = p$$

$$\langle k \rangle = \sum_{i=1}^N p \quad \text{et} \quad \langle k \rangle = Np$$

$$\langle k \rangle = \alpha T \Rightarrow p = \frac{\alpha T}{N}$$

### 1.0 Déroulement radiotélé

On demande la démonstration d'une autre solution. On observe que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . En effet, la fonction  $x \mapsto f_n(x)$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f'_n(x) = n^2 e^{-nx}$ . Pour  $n$  suffisamment grand, on a  $|f'_n(x)| < 1$  et donc  $|f_n(x)| < 1$ . D'après le théorème de Cauchy-Schwartz, il y a donc  $\varepsilon > 0$  tel que lorsque  $|x| > \varepsilon$ , alors  $|f_n(x)| < 1$ . Il est possible d'arrêter les intégrations au point où  $|x| > \varepsilon$  puisque l'intégration sur  $[0, \varepsilon]$  ne contribue pas à la limite. Soit  $\varepsilon > 0$  tel que lorsque  $|x| > \varepsilon$ , alors  $|f_n(x)| < 1$ . On peut alors écrire :

- 1 - Quel est le nombre moyen de désagréments dans un intervalle de 2h ? Quel est le nombre moyen de désagréments pendant la phase T ? Ils diffèrent l'un de l'autre, ou doivent-ils être égaux au sens de la fonction de  $E$  et de  $V$  ?

On peut maintenant calculer la distribution des intervalles de 2h d'agrément. On commence par supposer  $N = 10$ , et on la teste pour voir si on peut prendre  $N = 20$ .

2 - Quelle est la probabilité que dans un intervalle de 2h il n'y ait pas de désagréement (par exemple le 179) et aucun préavis dans les autres intervalles ? Utilisez alors la probabilité qu'il y ait au moins un désagréement pendant toute une heure, et que ce désagréement survienne dans un intervalle de 2h.

3 - Quelle est la probabilité d'avoir deux désagréements pendant les 10h à l'intervalle 17 et l'autre à l'intervalle 18 (par exemple) ? Si dans la probabilité qu'il y ait au moins un désagréement pendant le temps  $t$ , nous ajoutons celle qui prévoit que aucun autre intervient entre les deux.

4 - Ensuite, déterminez la probabilité qu'il n'y ait aucun désagréement pendant la dernière  $T$  h des intervalles qu'ayant survécu. Si cette dernière probabilité est nulle, la distribution est normale.

5 - Trouvez le biais  $b$  de l'approximation qui suppose que  $\mu = \lambda T$  (fonction de  $N$  dans  $\lambda$ ) pour obtenir  $P(X = k)$  en fonction de  $k$ . (On suppose que  $\lambda = 1 - e^{-\frac{2}{N}}$ .) Indiquez un mode de faire pour montrer que  $b = 2 - 1 = 1$  lorsque  $N = 5$ .

6 - Comment appelle-t-on distribution de probabilité ? Utilisez quelle en êtes convaincu. Calculer empiriquement la valeur moyenne ( $\bar{x}$ ) et la variance ( $S^2$ ). Indiquez quelle est la relation entre  $\bar{x}$  et  $S^2$ .

$$S) P(k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$$

$$= \binom{N}{k} \left(\frac{dT}{N}\right)^k \left(1 - \frac{dT}{N}\right)^{N-k}$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 10 \cdot 9 \cdot 8$$

$$\frac{8!}{5!} = \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$= N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-kN)$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \cancel{\frac{N}{N}} \cdot \cancel{\frac{N-1}{N}} \cdot \cancel{\frac{N-2}{N}} \cdot \dots \cdot \cancel{\frac{N-k+1}{N}}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \cdot (\alpha T)^k \cdot e^{-\alpha T}$$

$$X \sim \text{Poisson}(\delta)$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$\in \mathbb{N}_0$  pour des événements rares

For example:

$X$  = nombre de buts que l'équipe fait dans le prochain match | événements rare

~~X = nombre deverts de Dick Wirthi  
dans lesquels on trouve~~

$$a^N \cdot a^M = e^{m+n}$$

$$1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{\approx 2.7} \quad (1 + \approx 0)^{\approx n} = \approx 1^{\approx n} \approx \cancel{1}$$

$$2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e$$

ts que  
int dans le | événements rares

ts de Disk Novithi  
sh

### 1 □ Décroissance radioactive

On considère la désintégration d'une source radioactive. On observe que pendant une durée  $T$  courte devant la demi-vie de la source, le nombre moyen de désintégrations est  $\langle k \rangle = \alpha T$ . Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que pendant un temps  $T$  il y ait  $k$  désintégrations. Pour modéliser la désintégration, on découpe la durée  $T$  en  $N \gg 1$  intervalles de très courte durée  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . Pendant chacun des  $N$  intervalles  $\Delta t$ , il y a donc 0 ou 1 désintégration. On suppose que les événements sont indépendants d'un intervalle à l'autre. Soit  $p \ll 1$  la probabilité qu'une désintégration se produise pendant un intervalle  $\Delta t$ .

1 - Quel est le nombre moyen de désintégrations dans un intervalle  $\Delta t$  donné ? Quel est le nombre moyen de désintégrations pendant la durée  $T$ ? En relisant l'introduction, en déduire une expression de  $p$  en fonction de  $\alpha$ ,  $N$  et  $T$ .

On veut maintenant calculer la distribution de probabilité du nombre de désintégrations. On commence par supposer  $N$  fini, et, à la toute fin du calcul, on prendra la limite  $N \rightarrow \infty$ .

2 - Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration pendant un intervalle  $\Delta t$  donné (par exemple le 17<sup>e</sup>) et aucune pendant tous les autres intervalles ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement une désintégration pendant toute la durée  $T$ , sans qu'on précise à quel instant elle a eu lieu.

3 - Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégrations pendant le temps  $T$ , l'une à l'intervalle 17 et l'autre à l'intervalle 71 par exemple ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement deux désintégrations pendant toute la durée  $T$ , sans qu'on précise à quelles instants elles ont eu lieu.

4 - De même, déterminer la probabilité  $P(k)$  d'avoir exactement  $k$  désintégrations pendant la durée  $T$  à des instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution de probabilité est normalisée.

5 - Prendre la limite  $N \rightarrow \infty$  (après avoir remplacé  $p$  par son expression en fonction de  $N$  bien sûr) pour obtenir  $P(k)$  en fonction de  $\alpha$  et de  $T$  (on rappelle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\alpha}{N}\right]^N = e^\alpha$ ).

Indice : en cas de doute, commencer par calculer la limite pour  $k=1$  ou  $k=2$ .

6 - Comment s'appelle cette distribution de probabilité ? Vérifier qu'elle est bien normalisée. Calculer explicitement la valeur moyenne  $\langle k \rangle$  et la variance  $\text{Var}(k)$ .

Indice : écrire  $k^2 = k(k-1) + k$ .

b)

$$X \sim \text{Poisson}(\delta)$$

$$P(X=k) = e^{-\delta} \cdot \frac{\delta^k}{k!}$$

$\in \mathbb{N}_0$  pour des événements rares

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

$$e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{par définition de } e^\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = e^{-\lambda + \lambda} = e^0 = 1$$

par définition de  $e^\lambda$

$$\cancel{\langle X \rangle} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P(X=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \lambda^i}{i!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^i}{i!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda \cdot e^{-\lambda + \lambda} = \lambda \cdot e^0 = \boxed{\lambda = \langle k \rangle}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$(e^x)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Changement de l'indice  
Shift of the index

$$\sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{k=0}^3 a_{k+1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_{0+1} + a_{1+1} + a_{2+1} + a_{3+1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \lambda = \lambda \cdot e^{-\lambda + \lambda} = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$\frac{\cdot 2}{\begin{matrix} i \\ \cdot 1 \\ \cdot 0 \end{matrix}} =$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum x^2 P(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \lambda^i \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{\infty}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!}$$

$$\frac{i \cdot (i-1)}{i!} = \frac{1}{(i-2)!}$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda^i) = i \lambda^{i-1}$$

$$(i-1)!$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda} \lambda \frac{d}{d\lambda} (e^{\lambda}) \\ &= e^{-\lambda} \lambda (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) \\ &= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} (\lambda + 1) \\ &= \lambda(\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=5}^{10} a_k = \sum_{k=4}^9 a_{k+1}$$

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\text{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$